

Análisis de la propagación de errores en el código de Shor

André Fonseca de Oliveira¹, Ilan Cohn¹, Efrain Buksman¹,
Emiliano Espíndola¹, Jesús García López de Lacalle²

fonseca@ort.edu.uy, icohn@uni.ort.edu.uy, buksman@ort.edu.uy,
emiliano.espindola1@gmail.com, jglopez@etsisi.upm.es

¹Facultad de Ingeniería, Universidad ORT Uruguay
Cuareim 1451, Montevideo – Uruguay

²ETSISI, Universidad Politécnica de Madrid
Calle Alan Turing s/n, Madrid - España

Resumen: En este trabajo se presenta un estudio de la propagación de errores en un circuito cuántico que implementa el código de Shor de 9 qubits. Los errores son modelados mediante despolarización local, y se analiza el efecto de errores en el canal y en compuertas imperfectas mediante la propagación de la componente isotrópica del error y de la degradación de la probabilidad de mantener el estado cuántico. Se presentan cotas para las probabilidades máximas de errores de forma de ser exitosa la corrección realizada por el código.

Palabras clave: Quantum error correction, Shor quantum code, Quantum Isotropic Index.

Abstract: In this paper we present a study of error propagation in a 9 qubits Shor's code quantum circuit. Errors are modeled by local depolarization, for both channel and gate errors. The analysis made is based in the propagation of the error's isotropic component and the probability degradation of the original quantum state. Bounds for the maximum probability of errors are presented.

Keywords: Quantum error correction, quantum Shor code, Isotropic Quantum Index.

1 Introducción

Si bien teóricamente la computación cuántica puede resolver problemas que en forma clásica son muy difíciles de tratar (normalmente necesitan de recursos de orden exponencial), ésta no está exenta de errores que, de no corregirse, afectan en forma considerable la potencia de cálculo. Estos errores son debidos a múltiples factores: a la decoherencia ocasionada por la interacción con el ambiente, a las de imperfecciones en las compuertas, a la preparación y medición del estado cuántico.

Desde los primeros días de la computación cuántica se propusieron códigos, que utilizan redundancia en la información, con la finalidad de corregir los estados cuánticos expuestos a ruido [CS96] [Got97]. En este artículo se analiza el desempeño de un código corrector con una implementación más realista, cuyas compuertas actúan en forma imperfecta, encontrando valores de umbral para los cuales todavía tiene sentido efectuar la codificación. Para esto se ha elegido trabajar con el conocido código de Shor.

En la sección 2 se describe el modelo de error de despolarización local utilizado para modelar los errores de canal y de compuertas, mientras en la sección 3 se presenta el índice de isotropía para la caracterización de la propagación de errores isotrópicos en un sistema cuántico. El código cuántico corrector de Shor, de 9 qubits, es detallado en la sección 4. En la sección 5 se analiza el resultado de la existencia de errores en el canal y en las compuertas, y se calculan cotas para las probabilidades de errores de forma de mantener la utilidad de la codificación. Finalmente, en la sección 6 se detallan las conclusiones de los trabajos realizados.

2 Errores en sistemas cuánticos

Los sistemas cuánticos reales presentan resultados distintos de los teóricos, considerando una evolución de un sistema cerrado perfecto, debido a imperfecciones de construcción de los circuitos cuánticos y al proceso decoherencia, o sea, interacciones no esperadas con el ambiente no considerado en el sistema original. Una forma de analizar, y predecir, los resultados es interpretar lo último como ruido o errores.

Existen diversos tipos de modelos de errores que pueden ser utilizados para analizar el efecto de imperfecciones y principalmente, la decoherencia que afecta al sistema. El modelo, en principio, puede ser muy dependiente de la implementación física del sistema, siendo más probables cambios lógicos o cambios de fase.

En este trabajo tomamos como modelo de error el denominado canal de despolarización (*Depolarizing channel*), que actúa mezclando el estado original con un estado de máxima mezcla. De esta forma se considera el peor caso posible, no priorizando ninguna dirección del espacio.

2.1. Errores de despolarización de canal

El error de despolarización de canal es un modelo de error de decoherencia que altera el estado cuántico con igual probabilidad γ en todas las direcciones del espacio. Esto equivale a realizar un estado como una combinación entre el estado de máxima mezcla $I/2$ y el estado original ρ . Para un estado cuántico de 1 qubit se tiene:

$$\varepsilon(\rho) = \gamma \frac{I}{2} + (1 - \gamma)\rho, \quad (1)$$

siendo I la matriz identidad de 2×2 .

La Figura 1 ilustra, en la esfera de Bloch, los estados cuánticos mezcla resultantes para una probabilidad de $\gamma = 0,25$.

Una forma alternativa del cálculo del estado resultante es mediante la utilización de los operadores de Kraus (*Operator-sum representation*) [NC00]

$$\begin{aligned} E_0^\gamma &= \sqrt{1 - \frac{3\gamma}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_1^\gamma = \sqrt{\frac{\gamma}{4}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_2^\gamma &= \sqrt{\frac{\gamma}{4}} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, E_3^\gamma = \sqrt{\frac{\gamma}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

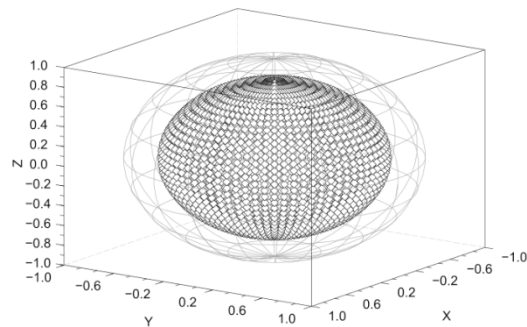


Figura 1: Efecto de la aplicación de los operadores del canal de despolarización sobre los estados puros en la esfera de Bloch para $\gamma = 0,25$.

siendo

$$\varepsilon^\gamma(\rho) = \sum_{i=0}^3 E_i^\gamma \rho E_i^{\gamma\dagger}. \quad (3)$$

2.2. Errores locales de despolarización de canal

La despolarización de canal local (LDCh) en el qubit j en un estado de n qubits puede ser calculada como:

$$\varepsilon_j^\gamma(\rho) = \sum_{i=0}^3 M_{ij}^\gamma \rho M_{ij}^{\gamma\dagger}, \quad (4)$$

Siendo:

$$M_{ij}^\gamma = (I^{\otimes(j-1)} \otimes E_i^\gamma \otimes I^{\otimes(n-j)}). \quad (5)$$

Como ejemplo, en el caso de un estado cuántico de n qubits si se considera que el error actúa en forma independiente y con igual probabilidad en todos los qubits, el estado resultante es:

$$\varepsilon^\gamma(\rho) = (\varepsilon_n^\gamma \circ \varepsilon_{n-1}^\gamma \circ \dots \circ \varepsilon_2^\gamma \circ \varepsilon_1^\gamma)(\rho). \quad (6)$$

3 Índice de isotropía para errores cuánticos

Un índice de isotropía cuantifica cuánto un estado mezcla representa un estado cuántico proveniente de un proceso de errores isotropos, o sea, una sucesión de errores que cuyas probabilidades dependen solamente de la distancia al estado original (estado de referencia).

En [dOBLM15] se define un doble índice de isotropía para un estado cuántico ρ , considerando como estado de referencia al estado puro $\rho_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, al par

$$Iso_\varphi(\rho) = (A, p) \quad (7)$$

Siendo:

- $p = 2^{-n}\lambda$, el *Ancho Isótropo*, con λ el menor autovalor de ρ ,
- y A , la *Alineación Isótropa*, definida como

$$A = Fid(\hat{\rho}, \rho_\varphi) - Fid(\hat{\rho}, \rho_{N\varphi}) \quad (8)$$

Donde:

- *Fid* es la *fidelidad* entre estados cuánticos,
- $\hat{\rho}$ proviene de la descomposición

$$\rho = p \frac{I}{2^n} + (1 - p)\hat{\rho}, \quad (9)$$

siendo p el *Ancho Isótropo* y $\hat{\rho}$ una matriz de densidad con al menos un valor propio nulo,

- y $\rho_{N\varphi} = (I - |\varphi\rangle\langle\varphi|)/(2^n - 1)$ (*mezcla isotropa ortogonal del estado ρ_φ*).

La representación gráfica del índice se realiza mediante el triángulo de isotropía, como es ilustrado en la Figura 2.

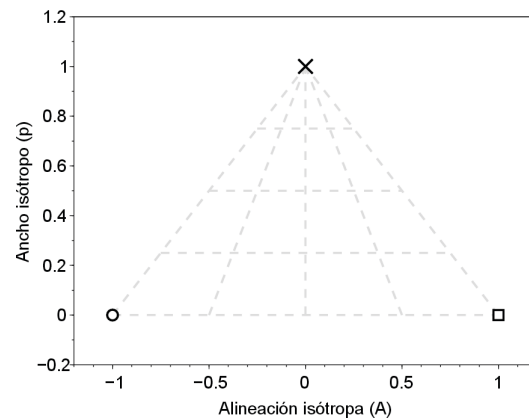


Figura 2: Triángulo de isotropía. En la figura se observa la representación del doble índice de isotropía de los estados ρ_φ (cuadrado), $\rho_{N\varphi}$ (círculo) e $I/2$ (cruz), considerando como estado de referencia el $|\varphi\rangle$.

4 El código cuántico corrector de Shor

Con la finalidad de atenuar el efecto de los errores en los sistemas cuánticos, en las últimas décadas han aparecido

diversas propuestas para la protección de la información contenida en los estados cuánticos, como los códigos correctores cuánticos, estudio de diseños tolerantes a fallos u otros [LMPZ96] [Got98] [KLZ98] [KLV00] [Got09].

El código corrector de 9 qubits propuesto por Peter Shor [Sho95] es una de las primeras propuestas de códigos correctores cuánticos, capaz de corregir cualquier tipo de error en un qubit. A continuación, se detallará la construcción de este código.

4.1. Código de 3 qubits

El código cuántico más simple es el código de 3 qubits, que es la base de construcción del código de Shor.

4.1.1. Corrección en cambios lógicos

El código de 3 qubits es capaz de detectar y corregir errores de valores lógicos (*bit flip*) en uno de sus qubits. La Figura 3 ilustra el circuito cuántico utilizado en la implementación de este código.

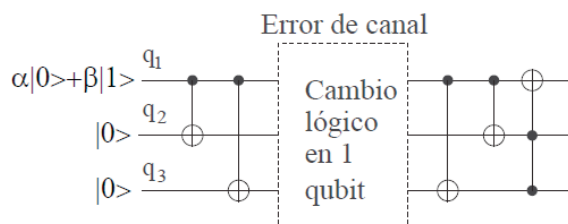


Figura 3: Circuito cuántico para el código de 3 qubits.

Análogamente a un código clásico, se agrega redundancia de modo de codificar 1 qubit en 3, utilizando 2 qubits extras inicializados en el estado $|0\rangle$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |000\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow |111\rangle \\ \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle &\rightarrow \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

En el caso de considerar un error de cambio lógico, a lo sumo en un qubit, los posibles estados a la salida del decodificador son:

$$\begin{aligned} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |00\rangle, \\ (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \otimes |11\rangle, \\ (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |10\rangle, \\ (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |01\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Se verifica que el primer qubit es separable y los 2 últimos representan el síndrome según la Tabla 1.

Tabla 1: Síndrome.

Síndrome	Error detectado
00	Sin error
01	Error en el tercer qubit
10	Error en el segundo qubit
11	Error en el primer qubit

Luego, con una compuerta del tipo Toffoli se implementa el corrector que altera el primer qubit solamente cuando el error ocurre en este, dando como resultado final un estado cuántico con el primer qubit separable y corregido, según:

$$\begin{aligned} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |00\rangle, \\ (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |11\rangle, \\ (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |10\rangle, \\ (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |01\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Con la intención de analizar el desempeño del código se considera una probabilidad p de ocasionar un error de cambio lógico en un qubit. Si no se codifica el mensaje existe una probabilidad de error igual a p .

En caso de utilizarse el código, la probabilidad de error que corresponde a los casos de errores en 2 o 3 qubits simultáneos, (ya no es posible la corrección), es de $3p^2(1-p) + p^3$, que es menor que p siempre que $p < 1/2$. O sea, en el caso de $p > 1/2$ es mejor enviar el estado sin codificar.

4.1.2. Corrección en cambios de fase

Utilizando la compuerta de Hadamard definida como:

$$H = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

se tiene que:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = HZH = H \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} H,$$

siendo X un cambio lógico (*bit flip*) y Z un cambio de fase (*phase flip*).

Luego se puede corregir cambios de fase en un qubit con el mismo procedimiento utilizado para cambios lógicos, mediante la transformación anterior. La Figura 4 ilustra el circuito para correcciones de cambios de fase en 1 qubit.

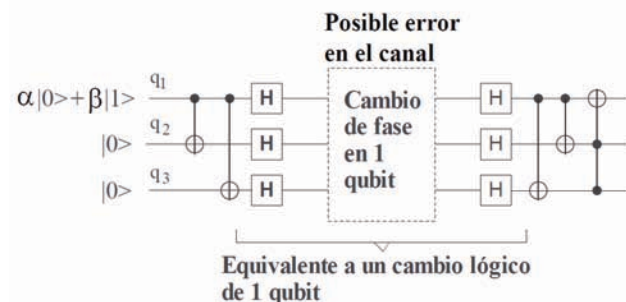


Figura 4: Código de 3 qubits. Corrección de cambios de fase.

4.2. Código de Shor de 9 qubits

El circuito propuesto por Peter Shor combina ambos circuitos anteriores, o sea, circuitos con códigos de 3 qubits para la corrección de errores lógicos y errores de fase, como ilustrado en las Figuras 5 y 6. La codificación es realizada en 9 qubits y posibilita corregir cualquier error arbitrario en 1 qubit. Las palabras del código son:

$$\begin{aligned} |0\rangle \rightarrow |0_L\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} (|000\rangle + |111\rangle)^{\otimes 3} \\ |1\rangle \rightarrow |1_L\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{8}} (|000\rangle - |111\rangle)^{\otimes 3} \end{aligned} \quad (13)$$

5 Análisis de la propagación de errores en el código de Shor

En esta sección se analiza el efecto de la propagación de errores en el código de Shor. El enfoque tomado, es el de comparar la degradación debido a errores en el canal con los errores de compuertas. El modelo de error utilizado es el presentado en la sección 2.2. En el canal se considerará un error del tipo canal de despolarización local en los 9 qubits con probabilidad δ , mientras que en las compuertas se supondrá un error similar de probabilidad γ actuando en forma independiente en las salidas de las compuertas, según la Figura 7.

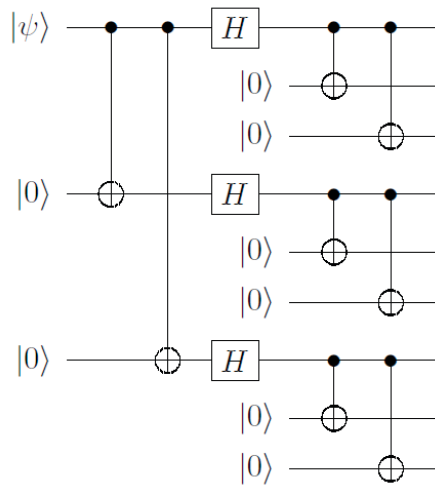


Figura 5: Código de Shor. Codificador.

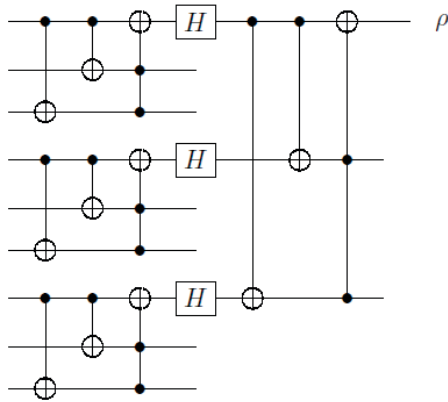


Figura 6: Código de Shor. Decodificador/Corrector.

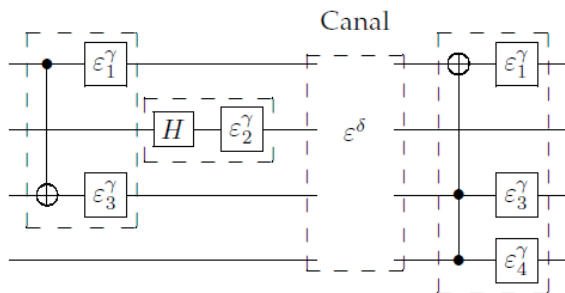


Figura 7: Ejemplo de modelo de errores locales para las compuertas, ecuación (4) con probabilidad γ , y para el canal, ecuación (5) con probabilidad δ .

5.1. Errores de canal

A modo de comenzar el análisis de la propagación de errores se considera compuertas perfectas ($\gamma = 0$) y un canal con una probabilidad $\delta \in [0,1]$ de error por qubit. La Figura 8 muestra la dependencia de la corrección según el estado originalmente codificado, en función de la probabilidad de éxito (recuperación del estado original $|\psi\rangle$) para el caso de $\delta = 0,1$, definida como:

$$P_{ex} = \langle \psi | \rho | \psi \rangle. \quad (14)$$

De la figura se observa que los estados con mayor probabilidad de recuperación son:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad y \quad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (15)$$

mientras que los de menor probabilidad son:

$$|y_+\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad e \quad |y_-\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (16)$$

Este resultado es válido para todo $\delta \in [0,1]$.

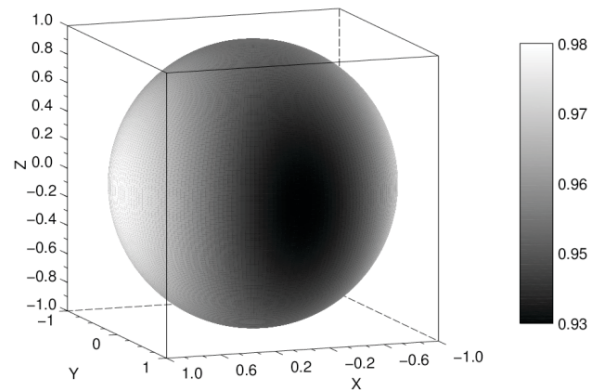


Figura 8: Probabilidad de recuperar el estado original (P_{ex}) en función de su ubicación en la esfera de Bloch. Se supone una probabilidad de error en el canal de $\delta = 0,1$.

La Figura 9 ilustra la variación de probabilidad de corrección en función de la probabilidad de error de canal δ para los estados originales $|+\rangle$, $|0\rangle$ e $|y_+\rangle$, y se compara con el error si no se utiliza el código. Si se considera el peor caso ($|y_+\rangle$) se tiene que es mejor trabajar con el estado sin codificar para valores de δ superiores a 0,07 (7%).

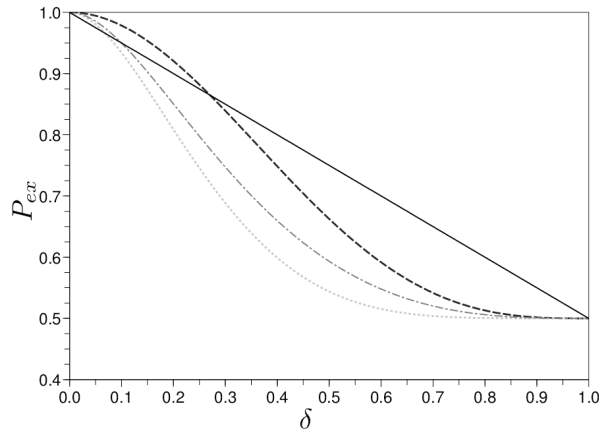


Figura 9: Probabilidad de éxito P_{ex} en función de la probabilidad de error en el canal δ . La curva gris oscuro (de a trazos) corresponde al estado $|+\rangle$ codificado, la curva gris (trazo y punto) al estado $|0\rangle$ y la curva gris claro (punteada) al estado $|y_+\rangle$. La curva sólida corresponde al estado sin codificar.

5.2. Caso de compuertas con errores

Cuando se considera que hay errores en las compuertas (probabilidad de error γ) se observa que, para una misma probabilidad, el error en las compuertas es predominante frente al error en el canal. La Figura 10 ilustra la variación de la probabilidad de éxito frente a variaciones de las probabilidades de errores solo en el canal ($\gamma = 0$) y solamente en las compuertas ($\delta = 0$), considerando como estado inicial al $|0\rangle$.

Si se consideran solamente errores en las compuertas, los estados de menor probabilidad son $|y_+\rangle$ e $|y_-\rangle$, análogamente al caso de errores solamente en el canal. La Figura 11 muestra la evolución de la probabilidad según las variaciones de δ considerando diferentes valores de probabilidad de error en el canal γ , y como estado inicial $|y_+\rangle$. Se observa que para valores de error de compuerta con probabilidad superior a 0,0006 (0,06%) es mejor trabajar con el estado sin codificar.

Si se propone analizar los resultados mediante la interpretación de la evolución del índice de isotropía del estado resultante de la utilización del código con errores, es necesario descomponer el estado final ρ mediante la ecuación (9). En este caso la probabilidad P_{ex} , ecuación (14), viene dada por

$$P_{ex} = \frac{p}{2} + (1 - p)\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle, \quad (17)$$

siendo p el Ancho Isótropo. Para valores de la Alineación Isótropa (A) cercanos a uno, el término $\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle$ es muy cercano a A^2 . Luego observando en la Figura 12 el resultado del índice para el estado inicial con peores valores de A ; $|\psi_{\pi/4}\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + e^{i\pi/4}|1\rangle)$, se nota que aún para valores de γ superiores al máximo hallado anteriormente, la contribución a la pérdida de probabilidad es principalmente debida al crecimiento del ancho p , y no al cambio de alineación.

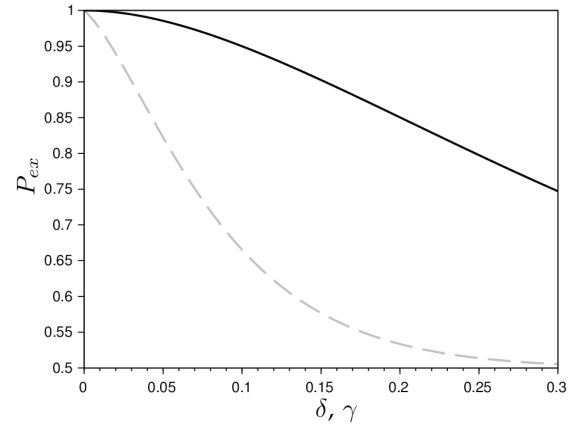


Figura 10: Variación de P_{ex} en función del error solo en el canal (curva negra sólida) y del error solamente en compuertas (de a trazos gris). Estado original $|0\rangle$.

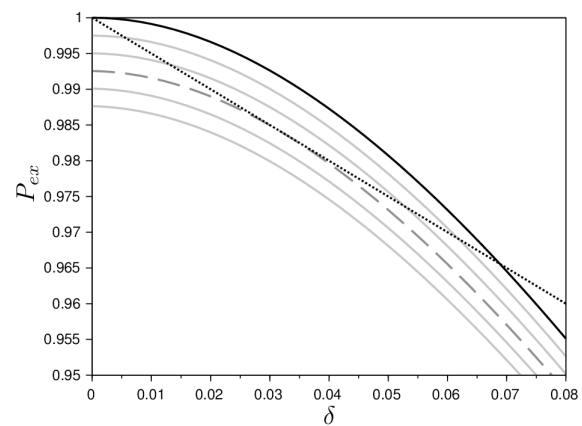


Figura 11: Variación de P_{ex} en función de δ para una familia de curvas en el parámetro $\gamma \in [0; 0,001]$. La curva negra sólida es para el caso de compuertas perfectas. La curva gris oscura punteada es la probabilidad de éxito al enviar el estado sin codificar. La gris a trazos marca el límite máximo de error de compuerta para el cuál es mejor enviar el estado sin codificar ($\gamma = 0,0006$). Las curvas gris claro indican otros valores de γ .

6 Conclusiones

En este artículo se ha analizado la degradación de un estado codificado mediante el código corrector de Shor utilizando errores de despolarización local, para modelar errores de canal y de compuertas.

Se ha visto que algunos estados producen mejores resultados respecto a otros, debido a la no simetría del código, llegando a que, si se considera una implementación con compuertas perfectas la máxima probabilidad de error de canal, δ , debe ser inferior a 7% de modo que codificar produzca mejores resultados frente a la ausencia de codificación, para cualquier estado de un qubit. En el caso de considerar compuertas imperfectas, modeladas con probabilidad de error γ , se concluye que el máximo valor admisible de probabilidad es 0,06%.

A diferencia de otros algoritmos cuánticos [dOCBL15], el deterioro en la probabilidad de éxito es debido

principalmente al aumento del *Ancho Isótropo*, siendo el efecto del cambio en la *Alineación Isótropa* despreciable.

Referencias bibliográficas

- [CS96] A. R. Calderbank and Peter W. Shor. Good quantum error-correcting codes exist. *Phys. Rev. A*, 54:1098–1105, Aug 1996.
- [dOBLM15] André Fonseca de Oliveira, Efrain Buksman, Jesús García López, and Francisco García Mazarío. Caracterización de errores en circuitos cuánticos: índice de isotropía para estados de n-qubits. In *XXXV Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física*, 2015.
- [dOCBL15] André Fonseca de Oliveira, Ilan Cohn, Efrain Buksman, and Jesús García López. Enfoque alternativo al análisis de errores de despolarización en el algoritmo de grover. In *VII Congreso Internacional de Computación y Telecomunicaciones, COMTEL 2015*. Universidad Inca Garcilaso de La Vega, 2015.
- [Got97] D. Gottesman. *Stabilizer codes and quantum error correction*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1997.
- [Got98] Daniel Gottesman. Theory of fault-tolerant quantum computation. *Phys. Rev. A*, 57:127–137, Jan 1998.
- [Got09] D. Gottesman. An introduction to quantum error correction and fault-tolerant quantum computation. arXiv:0904.2557v1, Apr 2009.
- [KLV00] Emanuel Knill, Raymond Laflamme, and Lorenza Viola. Theory of quantum error correction for general noise. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2525–2528, Mar 2000.
- [KLZ98] E. Knill, R. Laflamme, and W. H. Zurek. Resilient quantum computation: error models and thresholds. *Pro. R. Soc. A*, 454(1969):365–384, 1998.
- [LMPZ96] Raymond Laflamme, Cesar Miquel, Juan Pablo Paz, and Wojciech Hubert Zurek. Perfect quantum error correcting code. *Phys. Rev. Lett.*, 77:198–201, Jul 1996.
- [NC00] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [Sho95] Peter W. Shor. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Phys. Rev. A*, 52: R2493 – R2496, Oct 1995.